



O CÁLCULO ENVOLVENDO FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Silva, Izaías Nário, izaiafefsn@gmail.com¹
Huanca, Roger Ruben Huaman, roger@uepb.edu.br²

¹Universidade Estadual da Paraíba- UEPB

² Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Resumo: *Esse trabalho relata o desenvolvimento de uma aula do projeto de pesquisa de mestrado realizado num curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro. No projeto está envolvido a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, cujo conteúdo trabalhado foi as Funções de Várias Variáveis no contexto da modelagem matemática, fazendo uma reflexão sobre a importância das aplicações e algumas tarefas envolvendo as derivadas direcionais. O objetivo deste trabalho é apresentar uma estratégia de ensino que desenvolva mais autonomia no aluno, além da compreensão de que só há realmente um Cálculo, puro e simples, e que é escrito com C maiúsculo. Acreditamos que um conteúdo visto a partir de uma situação-problema tem um efeito cristizador dos conceitos teóricos e abstratos pertinentes a Matemática.*

Palavras-chave: *Funções de Várias Variáveis, Modelagem Matemática, Ensino de Cálculo*

INTRODUÇÃO

Esse trabalho traz um recorte de uma pesquisa de mestrado em andamento que está sendo realizada no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina denominada Cálculo Diferencial e Integral III¹, numa instituição de ensino superior localizada no interior do Estado da Paraíba.

É inquestionável que a disciplina de Cálculo III, a qual aborda as Funções de Várias Variáveis², é um importante momento na carreira de quem está cursando uma graduação em matemática ou áreas afins, pois é a disciplina que proporciona o primeiro contato com funções de mais de uma variável, ampliando o que se tinha estudado desde o Ensino Básico e início do Ensino Superior no tocante as funções. É também nesse momento que acontece uma abrangência nos conceitos de Limites, Derivadas e Integrais, tornando-a uma disciplina que merece uma atenção especial no que tange o ensino-aprendizagem.

É comum ainda que os alunos cheguem ao ensino superior defasados em matemática, com isso, o professor que vai trabalhar com essa disciplina deve ter bem claro os conceitos e dominar técnicas para desenvolver pré-requisitos básicos que deveriam ter adquiridos em disciplinas anteriores ao Cálculo III. Nesse sentido, este trabalho propõe apresentar uma estratégia de ensino que desenvolva mais autonomia no aluno, além de uma compreensão e reflexão da importância das FVV.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Crilly (2017), o Cálculo é uma plataforma central da matemática, hoje em dia vai ser raro encontrar um cientista, engenheiro ou economista quantitativo que não tenha se deparado com o Cálculo, ou

¹A nomenclatura da disciplina Cálculo III varia de instituição, contudo, o conteúdo chave são as Funções de Várias Variáveis e sua implicação no Cálculo Diferencial e Integral.

²Doravante denominaremos Funções de Várias Variáveis por FVV.

seja, as aplicações são amplas. Por essas razões nos cursos de Licenciatura em Matemática deveria ser preparado o licenciando para mostrar a beleza da matemática.

Lima (2012), ao relatar sobre a Matemática ensinada pelo seu professor, afirma que não era apenas um conjunto de regras e receitas válidas por decreto, era algo próximo da realidade e das aplicações, bem organizadas com definições, exemplos e demonstrações. Desse modo, acreditamos que um bom professor deve possuir um repertório metodológico variado que contemple um ensino de Matemática pautado no seu rigor peculiar, porém, que ofereça aos seus alunos algo tangível e compreensível.

Ocorre que, no Ensino Superior ela surge para muitos como uma vilã, pois, nesse momento os graduandos, de exatas ou não, apresentam uma defasagem impactante acumulada dos segmentos anteriores e cabe ao professor desse novo segmento, durante o curso, compensar ao máximo essa defasagem, de modo que o graduando assimile e aplique os pré-requisitos necessários para a compreensão dos conteúdos propostos. Desse modo, D'Ambrosio (1996) disserta que,

[...] é o reconhecimento do fato de a matemática ser muito afetada pela diversidade cultural. Não apenas a matemática elementar, reconhecendo, por exemplo, a modelagem matemática e procurando incorporá-las no currículo, mas também se reconhece diversidade naquilo que chamamos matemática avançada ou matemática universitária e a pesquisa em matemática pura e aplicada (D'AMBROSIO, 1996, p.58).

Nesse sentido, a Educação Matemática surge com força total para ajudar a compreender essas dificuldades. Assim, Barbosa (2004) cita a importância do sentido para a real compreensão do Cálculo no Ensino Superior:

Sabemos que a falta de sentido na aprendizagem de Cálculo origina-se, em parte, das dificuldades decorrentes dessa transposição. O aluno só compreende os vínculos do conteúdo estudado quando fica compreensível para ele essa passagem. Por isso, contextualizar no ensino de Cálculo vincularia os conhecimentos aos lugares onde foram criados e onde são aplicados, isto é, incorporar vivências concretas ao que vai se aprender e incorporando o aprendizado a novas vivências (BARBOSA, 2004, p. 41).

Com o intuito de apresentar uma proposta de ensino e a atender as novas diretrizes educacionais, nos apoiamos na modelagem matemática como metodologia, pois, a Modelagem Matemática na sala de aula pode ser um caminho para despertar no estudante o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece. Ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, os alunos utilizam os modelos matemáticos para resolver determinadas situações nas áreas da Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outros.

De acordo com Huanca (2014), a Modelagem Matemática enfatiza a importância de saber modelar problemas, condição necessária à formação do estudante no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática, leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver problemas; e estimula a criatividade nos alunos. Para nós, implementar a Modelagem Matemática em sala de aula e fora dela significa fazer Matemática ao modelar o problema.

Trazemos nesse trabalho uma proposta para o ensino das FVV amparada nos ideais da Modelagem Matemática. Para Bassanezi (2014, p.24) “a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Nesse sentido, a “arte de transformar” proposta por Bassanezi coloca o aluno como o sujeito que vai construir e modelar seu próprio conhecimento, aquele que vai buscar soluções rompendo assim com um ensino pautado na transmissão. Klüber (2010, p.111) defende que “a modelagem pode ser uma forte aliada dos professores de matemática e outros que buscam romper com a hegemonia da transmissão”.

Sendo assim, em todas as aulas dessa pesquisa o professor-pesquisador não transmitia de imediato as definições e propriedades, os alunos organizados em grupos eram postos diante de uma situação-problema e eram incentivados a buscar e construir o conhecimento necessário para resolvê-la. O professor tinha como papel mediar esse cenário. A seguir descrevemos um episódio de aula sobre derivadas direcionais que seguiu alguns elementos da estratégia de ensino-aprendizagem pautada na Modelagem Matemática.

AULA SOBRE DERIVADA DIRECIONAL

Para essa aula todos os alunos estavam com uma apostila que continha um resumo da teoria de derivadas parciais e direcionais, além dos livros que abordavam esse assunto e acesso a internet. Vale salientar aqui que não tínhamos explicado o conceito de derivada direcional, os alunos já haviam estudado as derivadas parciais. O nosso objetivo era conduzir os alunos a perceberem a necessidade de expandir as taxas de variações além das direções dos eixos cartesianos.

Iniciamos essa aula propondo para os alunos a seguinte situação-problema³:

Uma chapa de metal aquecida está situada no plano xy de tal modo que a temperatura em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. A temperatura em $(3, 4)$ é de 100 graus. Suponha que os eixos positivos 0_x e 0_y apontam, respectivamente, para leste e norte. Um objeto se encontra no ponto $P_0 = (2, 2)$.

- Se o objeto se mover para nordeste, ele aquecerá ou esfriará? E para sudeste? Justifique.
- Se o objeto se mover na direção do vetor $(-1, -1)$, ele aquecerá ou esfriará? Com que taxa?
- Se a velocidade com que o objeto se move na direção do item b) é de $\frac{1}{5} m/s$, calcule a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo no ponto P_0 .
- Na direção e sentido de que vetores o objeto deve se mover, a partir de P_0 , para que a temperatura permaneça constante?

A primeira tarefa para resolver nessa situação-problema era modelar a função que descrevesse a temperatura em cada ponto do plano. A distância de um ponto qualquer no plano $P = (x, y)$ até a origem é $d_{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como a temperatura em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto até a origem, então $T(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ onde k é a constante de proporcionalidade. Da hipótese, $T(3, 4) = 100 = \frac{k}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 100 = \frac{k}{5} \Rightarrow k = 500$. Portanto a função temperatura é dada por:

$$T(x, y) = \frac{500}{\sqrt{x^2 + y^2}}; (x, y) \neq (0, 0).$$

Para modelar essa função não exigiu nada além de conhecimento matemático sobre distância de pontos no plano, a hipótese $T(3, 4) = 100$ e o conceito de proporcionalidade. Alguns grupos tiveram dificuldades em modelar essa função, porém, depois que o primeiro grupo conseguiu, socializou com os demais.

Para resolver os demais itens dessa questão com maior precisão matemática precisa-se construir o conceito de derivada direcional. No entanto, eles começaram na alternativa (a) e parte da (b) com a estratégia de substituir pontos na função T , começando pelo ponto P_0 e tomando outros a nordeste deste, tais como $(3, 3)$ e $(4, 4)$. Assim, perceberam que:

$$T(2, 2) = \frac{500}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{500}{\sqrt{8}} = \frac{250}{\sqrt{2}} = \frac{250\sqrt{2}}{2} = 125\sqrt{2} \approx 176,8;$$

$$T(3, 3) = \frac{500}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{500}{\sqrt{18}} = \frac{500}{3\sqrt{2}} = \frac{250\sqrt{2}}{3} \approx 117,8;$$

$$T(4, 4) = \frac{500}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{500}{\sqrt{32}} = \frac{500}{4\sqrt{2}} = \frac{125\sqrt{2}}{2} \approx 88,4.$$

Logo concluíram, por esse raciocínio, a medida que se distanciava do ponto P_0 na direção nordeste, a temperatura diminuía, validando assim a exigência do problema que a temperatura em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem.

Quando os alunos chegaram a segunda pergunta do item (b) que interrogava sobre a taxa de variação, não conseguiram resolver essa parte, nem se quer realizar uma taxa média de variação, haja vista que eles vinham atribuindo valores a função temperatura. Nesse momento o professor-pesquisador começou a dialogar com os alunos objetivando construir o conceito de derivadas direcionais.

A noção intuitiva das derivadas direcionais não será problema para um aluno que entendeu bem o conceito de derivadas parciais. Quando queremos expandir essa taxa de variação em qualquer direção, considera-se um vetor unitário qualquer u e calcula a taxa de variação em sua direção. Isso é o conceito clássico das derivadas direcionais.

Antes de definir derivadas direcionais buscamos compreender sua interpretação geométrica partindo da interpretação geométrica das derivadas parciais. Stewart (2007, p. 939) traz de forma bem compreensível em seu livro a seguinte definição para derivadas direcionais: “a **derivada direcional** de f em (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor unitário $u = \langle a, b \rangle$ é

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}, \text{ se esse limite existir. ”}$$

Dependendo da função que se pretenda encontrar a derivada direcional via o limite proposto na definição acima, se torna uma tarefa difícil. Assim, dois teoremas são fundamentais para facilitar o cálculo da derivada direcional. Pinto e Morgado (2015) afirma que se f é diferenciável num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, então

³Retirado de Pinto e Morgado (2015, p.121).

$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$. Ou seja, calcular a derivada direcional é encontrar o produto escalar do vetor gradiente de f pelo versor do vetor u .

Desse modo, essas derivadas são na verdade “a projeção escalar do vetor gradiente sobre u ”. (STEWART, p. 942). A demonstração desse resultado decorre com uma argumentação simples e direta, aplicando o fato de f ser diferenciável em P_0 e algumas propriedades de limite.

O segundo teorema é um facilitador nos problemas envolvendo derivadas direcionais que deseja-se saber qual a direção que a função tem maior, menor ou não existe variação. “Se f é uma função diferenciável em P_0 tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$, então o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ ocorre quando u tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ o valor máximo. (PINTO ; MORGADO, 2015, p.119).

A demonstração desse teorema decorre de imediato da interpretação geométrica do produto escalar, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \|\nabla f(P_0)\| \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| \cos \theta = \|\nabla f(P_0)\| \cos \theta$, sendo θ o ângulo entre o vetor gradiente e o vetor u . Como $\|\nabla f(P_0)\|$ é um valor constante, então a derivada direcional alcança um valor máximo quando $\cos \theta = 1$, ou seja, quando o ângulo $\theta = 0$ e, por conseguinte, quando o vetor gradiente e o vetor u têm mesma direção e sentido. Assim, se $\cos \theta = -1$ a derivada direcional tem crescimento mínimo; se $\cos \theta = 0$ não há variação de crescimento.

Depois de realizada essa formalização e construído esses conceitos os alunos foram provocados a retomarem a situação-problema inicial e resolvê-la utilizando o conhecimento de derivadas direcionais. Em seguida trazemos a resolução.

Solução do item (a): Queremos saber se o objeto que se encontra no ponto P_0 ao se mover para nordeste ele aquecerá ou esfriará. Para isso calcularemos a derivada direcional na direção da reta $x = y$, a saber, do vetor $u = (1, 1)$. Iniciemos encontrando o gradiente da função $T(x, y) = \frac{500}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $(x, y) \neq (0, 0)$, segue:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = -500x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ e } \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -500y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Assim $\nabla T(2, 2) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(2, 2), \frac{\partial T}{\partial y}(2, 2) \right) = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}} \right)$. Como $u = (1, 1) \Rightarrow \|u\| = \sqrt{2}$ e consequentemente $\frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Aplicando esses resultados em $\frac{\partial T}{\partial u}(P_0) = \nabla T(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$, teremos:

$$\frac{\partial T}{\partial u}(2, 2) = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{125}{4} - \frac{125}{4} = -\frac{250}{4} = -62,5.$$

Portanto, se o objeto se mover na direção nordeste do ponto P_0 ele esfriará.

Perceba a beleza dessa ferramenta matemática, além de mostrar que a temperatura está diminuindo nessa direção ela nos fornece com qual intensidade, para ser mais exato, a cada unidade percorrida no plano na direção indicada, a temperatura cairá $-62,5$ graus. Por isso a importância do vetor ser unitário na definição, facilita a percepção métrica do problema.

Continuando a resolução, queremos agora a variação da temperatura quando o objeto se mover para sudeste do ponto P_0 . Para isso consideremos $u = (1, -1)$. Utilizando o mesmo procedimento anterior, chegaremos que

$$\frac{\partial T}{\partial u}(2, 2) = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{125}{4} + \frac{125}{4} = 0.$$

Logo nessa direção não há variação de temperatura.

Solução do item (b): Se o objeto se mover na direção do vetor $u = (-1, -1)$, teremos um sentido oposto do tomado inicialmente no item anterior. Assim, teremos o seguinte resultado:

$$\frac{\partial T}{\partial u}(2, 2) = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{125}{4} + \frac{125}{4} = \frac{250}{4} = 62,5.$$

Solução do item (c): Se a velocidade com que o objeto se move na direção do item b) é de $\frac{1}{5}$ m/s, então a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial u}(2, 2) = \nabla T(2, 2) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{u}{\|u\|} = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{25}{2} \text{ graus/s.}$$

Essa resposta nos mostra que a derivada direcional além de prever a variação tomando como parâmetro a unidade percorrida no plano é possível estabelecer essa variação tomando como referência o tempo e suas unidades. Nesse caso, com a velocidade estabelecida mostrou-se a mudança da temperatura a cada segundo.

Solução do item (d): Sabemos, pelo segundo teorema discutido nesse trabalho sobre derivadas direcionais, que o gradiente de uma função aponta a direção e o sentido de maior crescimento na taxa de variação e os vetores ortogonais ao gradiente aponta a direção e sentido de variação nula. Desse modo, consideremos

$$u = \nabla T(2, 2) = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\left(-\frac{125}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{125}{2}$$

Tomando o versor desse vetor, temos:

$$\frac{u}{\|u\|} = \frac{2}{125} \cdot \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Como queremos a direção e o sentido na qual o objeto deve se mover, a partir de P_0 , para que a temperatura permaneça constante, então se tomarmos vetores ortogonais a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ estará resolvido o problema. Sem mais delongas, os vetores serão:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Percebemos nessa situação-problema trabalhada a beleza e o encanto dessa ferramenta matemática e o quanto de significado teórico ela pode trazer para o aluno no tocante as derivadas direcionais. Uma questão que fomentou tanto os procedimentos para modelação e abstração da função que descrevesse temperatura quanto à aplicação direta dos conceitos de taxa de variação direcionada.

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi mostrar a importância de uma estratégia de ensino que desenvolva mais autonomia no aluno, além de uma compreensão mais significativa em alguns conteúdos do Cálculo. Para isso ocorrer com eficácia requereu um planejamento mais efetivo das aulas e atividades. Evidente que toda aula por mais simples que seja deve ser pensada antecipadamente, isso é uma rotina peculiar de todo bom professor. Contudo, no contexto da Modelagem uma aula de matemática exige um rigor a mais nos seus desdobramentos.

Vale destacar também que ao trabalhar com uma estratégia de ensino envolvendo a Modelagem Matemática num curso regular exige coragem e jogo de cintura por parte do professor para racionalizar bem o tempo, permitindo que a ementa seja cumprida com assiduidade e fluidez, além de romper com algumas hegemonias no ensino. O medo de errar por parte dos alunos foi uma das amarras que tivemos, inicialmente, bater de frente mostrando que a aprendizagem é um processo de construção e reconstrução.

Acreditamos que um conteúdo visto a partir de uma situação-problema tem um efeito cristizador dos conceitos teóricos e abstratos pertinentes a Matemática. Esperamos assim, ter contribuído com esse trabalho ao trazer essa sucinta proposta de ensino, onde os professores possam enxergar alternativas metodológicas para abordarem conteúdos relacionados ao Cálculo.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? Veritati, n. 4, 2004.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 4. Ed. São Paulo: Contexto, 2014.

CRILLY, T. Cinquenta Ideias de Matemática. 1. Ed. São Paulo, SP: Planeta, 2017.

D'AMBRÓSIO, U. Educação Matemática da Teoria à Prática. Campinas, SP: Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática), 1996.

HUANCA, R. R. H. A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

KLÜBER, T.E. “Modelagem matemática: revisando aspectos que justificam a sua utilização no ensino”. In: BRANDT, C.F. (org.). Modelagem Matemática: uma perspectiva para Educação Básica. Ponta Grossa: editora UEPG, 2010. pág. 97-114.

LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. 6º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis. 4º ed. Rio de Janeiro: editora UFRJ, 2015.

STEWART, J. Cálculo volume II. 5º ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

COMO CITAR ESTE ARTIGO?

SILVA, I. N.; HUANCA, R. R. H. O Cálculo envolvendo Funções de Várias Variáveis: uma proposta de ensino. In: IX Bienal de Matemática da SBM, 2019, Juazeiro do Norte, CE – 25 a 28 de fevereiro de 2019. Disponível em: <<http://www.grupos.uepb.edu.br/gprpem/artigos/>>. Acesso em: < inserir aqui a data em que você acessou o artigo>